Противовоздушная оборона: математика, информатика, техника

Air Defense: Mathematics, Computer Science, Engineering

© Очков В.Ф., Петухов В.Н., 2025

В качестве эпиграфа приведём одну миниатюру незабвенного Михаила Михайловича Жванецкого.

«*Звонок.*
- Скажите, это институт по отработке ориентации ракет в безвоздушном пространстве?
- А-а-а!
В институте упала трубка и раздался выстрел. Застрелился начальник третьего отдела.
На следующий день куча опавших листьев, под которыми ревели грузовики, переместилась в тайгу.
На старом месте только ветер шевелил оставшийся кусок парового отопления.

Звонок.
- Скажите, пожалуйста, это институт по отработке ориентации ракет в безвоздушном пространстве?
- А-а-а! Опять! А-а-а!
Ба-бах! Застрелился опытный сотрудник-секретчик, гордость организации.
На следующий день вся тайга вместе со снегом переехала в Каракумы.

Звонок.
- Простите, пожалуйста, это опять я, я вам, наверное, надоел... Это институт по отработке ориентации ракет в безвоздушном пространстве?
- Да. Чего тебе?
- Надю можно?»

Михаил Жванецкий концерт - смотреть видео онлайн от «Famous Faces Unveiled» в хорошем качестве, опубликованное 17 июня 2024 года в 14:39:46.

Задача.

Из пушки выпустили снаряд, который нужно перехватить и уничтожить. Для этого пускается ракета, которая летит строго на снаряд и достигает цели. Необходимо, определить траектории полёта снаряда и ракеты.

На рисунке 1 показана фотография ночного неба над одним из городов Израиля с траекториями полета ракет системы ПВО «Железный купол». В миниатюре Жванецкого упомянуты Каракумы. Но можно было бы там указать одну из пустынь этой ближневосточной страны, где чуть ли не половина населения – это выходцы из бывшего СССР.

Рис. 1 – Фото полёта ракет, уничтожающих снаряды

Но, шутки в сторону – к делу!

На рисунке 2 показан SMath-расчёт[1] полёта ракеты к летящему артиллерийскому снаряду, у которого начальная скоростью v_0. Ствол пушки поднят над горизонтом под углом α. Задана масса снаряда m, диаметр его сечения d и коэффициент трения снаряда о воздух f (первая строка расчёта). На второй строке задаются координаты пуска ракеты к снаряду и её скорость, которая будет оставаться постоянной во время погони за снарядом. Мы работаем не просто с числовыми значениями, а с физическими величинами, две из которых условно безразмерные – угол и коэффициент трения[2]. Это современный тренд, а где-то уже и стандарт инженерных и научно-технических расчетов. Наверху рис. 2 показаны инструменты ввода в расчет единиц измерения. Переменные имеют индексы – текстовые (часть имени переменной, слегка опущенная вниз) и векторные (оператор работы с массивами – векторами и матрицами). Первый индекс вводится в расчёт через точку, а второй – через символ "[" (открывающаяся квадратная скобка). Есть и двойной индекс – см. операторы ввода на второй строке расчёта, где задаются первые элементы векторов x_r и y_r – координаты старта ракеты. В ходе расчёта (а он скрыт в свёрнутой области с соответствующей надписью) будут заполнены последующие элементы этих векторов, что позволит показать на графике траекторию полёта ракеты к снаряду.

У нас задача плоская. Но ничто не мешает нам ввести третью координату z и решить трёхмерную задачу.

[1] Эту свободно распространяемую программу можно за пару минут скачать с сайта www.smath.com и установить на компьютере, работающем под Widows или Linux.

[2] Условность здесь в том, что нельзя складывать угол и коэффициент трения, как нельзя складывать метр с килограммом.

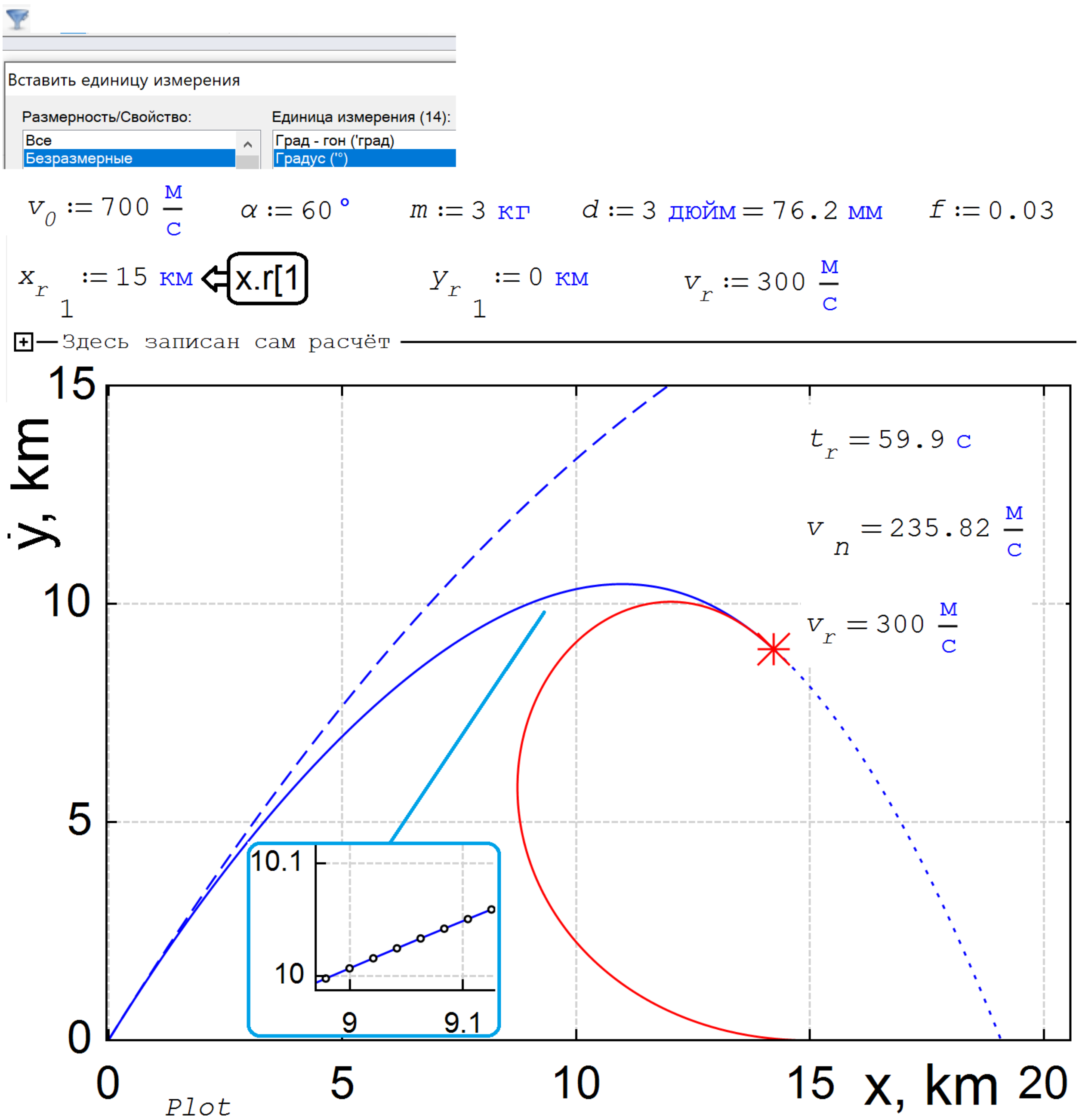


Рис. 2 – Расчёт перехвата артиллерийского снаряда

На рисунке 3 первой строкой ведется расчёт площади поперечного сечения снаряда s и задаётся плотность воздуха ρ_{air}. По хорошему счёту здесь должна быть функция, а не константа – плотность воздуха падает по высоте. Но сделаем допущение для малых высот, что это константа. Ещё два допущения: коэффициент трения f тоже константа, а сила трения пропорциональна скорости в квадрате, что будет записано в соответствующих дифференциальных уравнениях, о которых речь пойдет ниже.

Во второй строке на рис. 3 записаны две функции, возвращающие координаты полёта снаряда в безвоздушном пространстве (см. эпиграф) в зависимости от времени. Индекс p в именах функций – это первая буква слова «парабола». Снаряд (материальная точка, имеющая массу, но не имеющая размеры) полетит из пушки по параболе, если принять, что земля плоская (однородное гравитационное поле), а воздуха нет. На рисунке 2 показаны две траектории полёта снаряда, выходящие из начала координат: пунктир – без учёта сопротивления воздуха и сплошная линия – с учётом. А как был принят воздух во внимание?

Для этого была составлена и решена система двух обыкновенных дифференциальных уравнений полета снаряда из пушки. Они показаны в рамочке на рис. 3: произведение массы на ускорение (на вторую производную пути по времени) равно сумме сил, действующих на материальную точку. Задействован принцип суперпозиций: упомянутое равенство (второй закон Ньютона) рассмотрено и по горизонтали, и по вертикали. В горизонтальном направлении на снаряд действует только сила трения воздуха. В вертикальном направлении к этой силе добавлена сила притяжения Земли. Скорость полета снаряда в вертикальном направлении меняет свой знак – снаряд сначала летит вверх, а потом вниз. Поэтому-то в соответствующем дифференциальном уравнении записан не квадрат скорости, а произведение скорости на её абсолютное значение. Это сделано для того, чтобы сила трения снаряда о воздух была всегда направлена против движения снаряда. Возведение во вторую степень лишает скорость знака (направления): вектор превращается в скаляр.

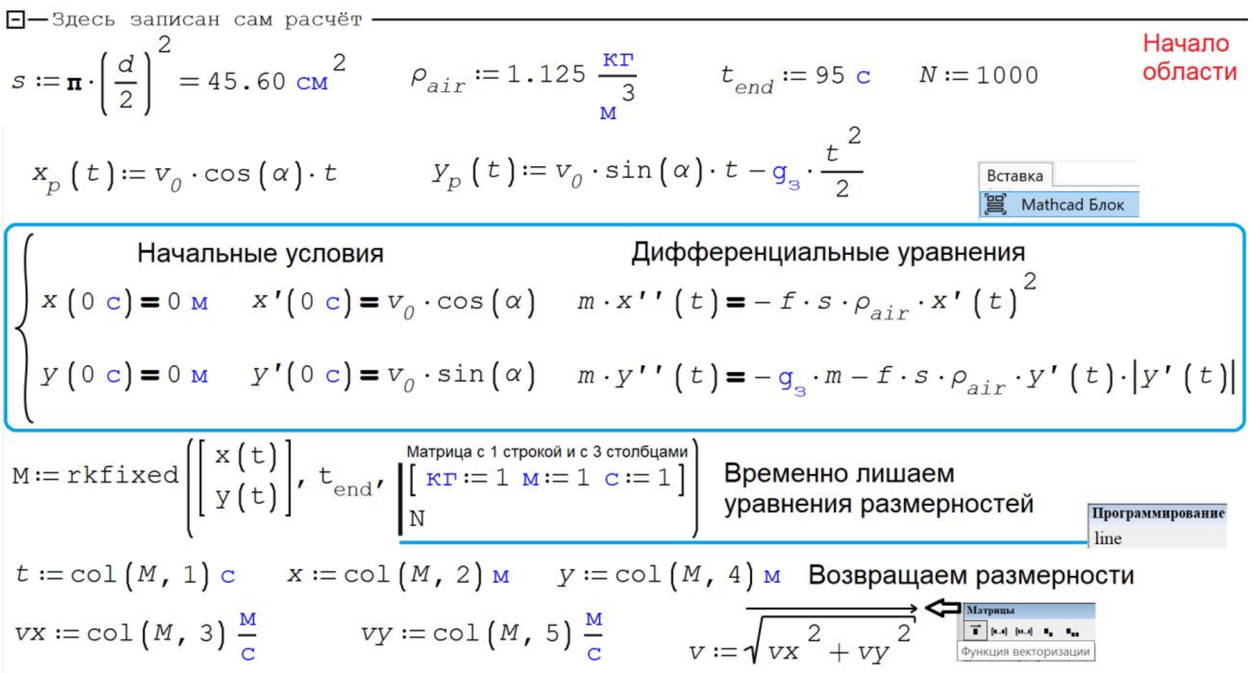


Рис. 3 – Расчёт траектории полета артиллерийского снаряда

Если из уравнений, показанных в рамочке на рис. 3, в правой части убрать произведения, где фигурирует коэффициент f, то такую систему можно решить аналитически – получить функции, которые введены в расчёт повыше рамочки на рис. 3. Если же учитывать сопротивление воздуха, то аналитического решения можно и не получить. Тут придется переходить к численным методам расчёта – к табулированию искомых функций, что и показано на рис. 3 в рамочке и функцией *rkfixed* под ней.

Функция *rkfixed* возвращает вектор с пятью столбцами и N+1 строками. Первый столбец – это дискретные значения времени от нуля (выстрел) до значения t_{end}, которое задано пользователем вместе со значением N. Остальные столбцы матрицы M хранят рассчитанные значения координат летящего снаряда и его скорости по абсциссе и ординате. Встроенная в SMath функция `col` изымает из матрицы указанные столбцы и заносит их в вектора t, x, y, vx и vy. Вектор v хранит полную скорость снаряда.

На рисунке 2 можно видеть фрагмент кривой полета снаряда, где на сплошную линию нанизаны точки. Этим лишний раз подчеркивается то, что решение численное, а не аналитическое: мы получаем не функцию, а дискретные значения искомой функции.

В расчёте на рисунке 4 формируются векторы x_r и y_r, первые элементы которых (дислокация пусковой установки) были заданы в начале расчёта на рис. 2.

Переменная Δt хранит промежуток времени, за который снаряд переместиться из одной дискретной точки в другое. Вектор φ будет накапливать значения азимута полета ракеты – угла между направлением её движения и линией горизонта. Переменная L – это расстояние от ракеты до снаряда. Ракета, повторяем, летит строго на снаряд. Она управляется с земли и/или с помощью бортового компьютера.

Векторы x_r, y_r и φ заполняются в теле цикла `for`: мы знаем значения предыдущих элементов трёх векторов (`i`) – рассчитываем по несложным формулам значения последующих элементов (i+1). Такие итерации проводятся до тех пор, пока ракета не достигнет снаряда – расстояние между ними станет меньше пяти метров. Тут сработает боевая часть ракеты и снаряд будет уничтожен – см. разлетающиеся искры на рис. 1: салют в честь сбитого снаряда.

$$\Delta t := \frac{t_{end}}{N} = 0.095\ \text{с}$$

$$\varphi_1 := \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{y_1 - y_{r_1}}{\text{м}}, \frac{x_1 - x_{r_1}}{\text{м}}\right)\right] = [\,180.0\,]\ °$$

$$L := \sqrt{\left(x_1 - x_{r_1}\right)^2 + \left(y_1 - y_{r_1}\right)^2} = 15.00\ \text{км}$$

$$\begin{array}{l} \text{for } i := 1, L > 5\ \text{м}, i := i + 1 \\ \left| \begin{array}{l} x_{r_{i+1}} := \operatorname{eval}\left(x_{r_i} + v_r \cdot \Delta t \cdot \cos\left(\varphi_i\right)\right) \\ y_{r_{i+1}} := \operatorname{eval}\left(y_{r_i} + v_r \cdot \Delta t \cdot \sin\left(\varphi_i\right)\right) \\ \varphi_{i+1} := \operatorname{eval}\left(\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y_i - y_{r_i}}{\text{м}}, \dfrac{x_i - x_{r_i}}{\text{м}}\right)\right) \\ L := \sqrt{\left(x_{i+1} - x_{r_{i+1}}\right)^2 + \left(y_{i+1} - y_{r_{i+1}}\right)^2} \end{array} \right. \end{array}$$

$$n := \operatorname{length}\left(x_r\right) = 631 \qquad t_r := t_n = 59.8\ \text{с} \qquad L = 3.07\ \text{м}$$

$$x_1 := \operatorname{submatrix}(x, 1, n, 1, 1) \quad x_2 := \operatorname{submatrix}(x, n, N, 1, 1)$$

$$y_1 := \operatorname{submatrix}(y, 1, n, 1, 1) \quad y_2 := \operatorname{submatrix}(y, n, N, 1, 1)$$

Рис. 4 – Расчёт траектории полета ракеты ПВО

Особо следует рассказать о функции `eval` в среде SMath. Дело в том, что в этот физико-математический пакет встроена символьная, а не численная математика. Вследствие этого вычисления производятся с максимальной точностью и, следовательно, довольно долго. Это незаметно в линейных вычислениях, но становится нестерпимым в циклах. Функция `eval` преобразует символьное выражение (1/3, например) в численное (0.333…), что ускоряет расчёт за счёт некоторой потери точности. Но у нас весь расчёт довольно приближенный даже без учета принятых упрощений.

Последний оператор области, показанной в свернутом виде на рис. 2, отображен на рис. 5. Переменную *`Plot`* достаточно вставить аргументом графика и отформатировать его должным образом.

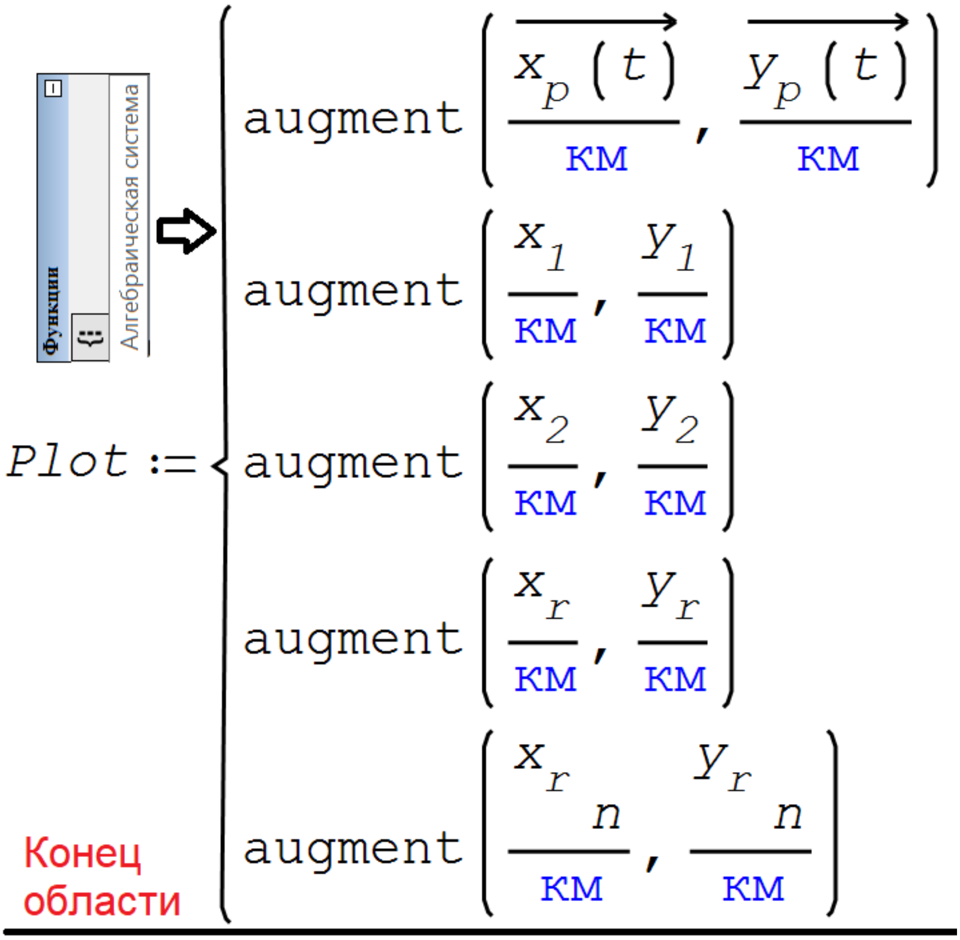


Рис. 5 – Формирование аргумента графика на рис. 2

В расчете несложно учесть зависимость плотности воздуха от высоты – рис. 6.

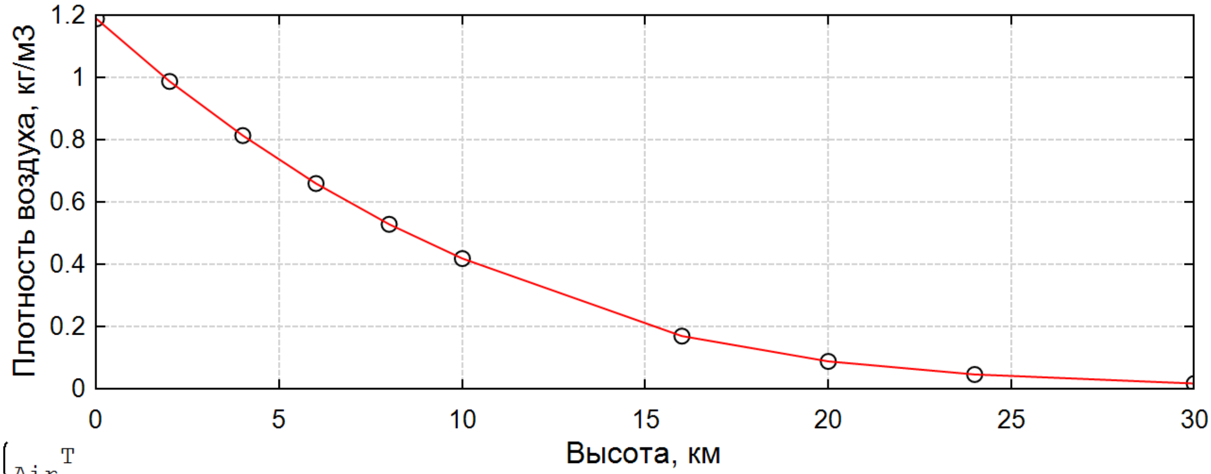
Для этого достаточно найти в бумажных или интернетовских справочниках соответствующие таблицы, перенести числа из них в SMath-матрицу с именем Air, где первая строка – это высота в километрах, а вторая – плотность воздуха в килограммах, делённых на кубический метр. Далее провести несложную линейную интерполяцию, с получением функции ρ_{air}, которой нужно будет заменить одноименную константу в системе дифференциальных уравнений – см. рис. 7.

⊟— Плотность воздуха по высоте

$$Air := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 16 & 20 & 24 & 30 \\ 1.190 & 0.989 & 0.815 & 0.661 & 0.530 & 0.420 & 0.171 & 0.0897 & 0.0477 & 0.0186 \end{bmatrix}$$

$$\rho_{air}(h) := \left| \begin{array}{l} h := \dfrac{h}{\mathrm{km}} \\ \mathrm{linterp}\left(\mathrm{row}(Air, 1)^T, \mathrm{row}(Air, 2)^T, h\right) \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \end{array} \right. \qquad \rho_{air}(7\ \mathrm{km}) = 0.5955\ \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

$$h := [0\ \mathrm{m}, 1\ \mathrm{km} .. 30\ \mathrm{km}]$$



$$\begin{cases} \mathrm{Air}^T \\ \mathrm{augment}\left(\dfrac{h}{\mathrm{km}}, \overrightarrow{\rho_{air}(h)}\right) \end{cases}$$

Рис. 6 – Изменение плотности воздуха по высоте

$$m \cdot x''(t) = -f \cdot s \cdot \rho_{air}(y(t)) \cdot x'(t)^2$$

$$m \cdot y''(t) = -g_e \cdot m - f \cdot s \cdot \rho_{air}(y(t)) \cdot y'(t) \cdot |y'(t)|$$

Рис. 7 – Система дифференциальных уравнений с учётом изменения плотности воздуха по высоте