

ГЕОДЕЗИЯ

ПРОСТОЙ И НАДЕЖНЫЙ СПОСОБ ВЫЧИСЛЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ШИРОТЫ И ВЫСОТЫ ТОЧЕК ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ ПО ПРЯМОУГОЛЬНЫМ КООРДИНАТАМ

Доцент, кандидат техн. наук Л.В. Огородова

Московский государственный университет геодезии и картографии

vg@miigaik.ru

Аннотация. Предложен простой способ вычисления геодезических криволинейных координат, основанный на использовании взаимосвязи геодезической широты и высоты. Выполнено сравнение этого способа с другими.

Ключевые слова: геодезические прямоугольные координаты, геодезические криволинейные координаты, воздушный эллипсоид, внешний эллипсоид

Abstract. A simple method of transforming geodetic rectangular coordinates to geodetic curvilinear coordinates is recommended. The method is compared with other methods.

Keywords: geodetic rectangular coordinates, geodetic curvilinear coordinates, aerial ellipsoid, external ellipsoid

Прямоугольные и криволинейные геодезические координаты связаны соотношениями [1]

$$\begin{aligned} X &= (N + H) \cos B \cos L; \\ Y &= (N + H) \cos B \sin L; \\ Z &= (N + H)(1 - e^2) \sin B + He^2 \sin B; \\ D &= \sqrt{X^2 + Y^2} = (N + H) \cos B, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \quad (2)$$

— радиус кривизны первого вертикала; D — радиус параллели; a, e — параметры используемого (отсчетного) эллипсоида.

Из формул (1) для широты получим такое уравнение

$$\operatorname{tg} B = \frac{Z - He^2 \sin B}{(1 - e^2)D}. \quad (3)$$

В этом выражении неизвестны широта B , высота H , и его целесообразно решать способом приближений. Положим в начальном приближении высоту H_0 равной нулю,

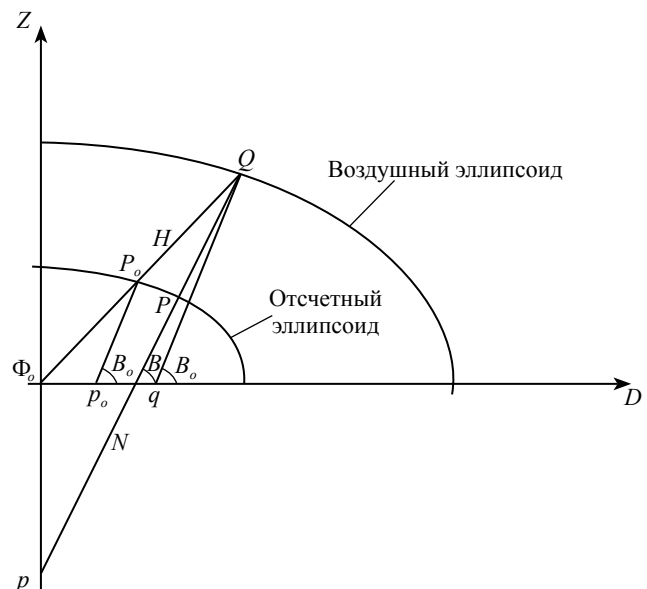
$$H_0 = 0, \quad (4)$$

тогда

$$\operatorname{tg} B_0 = \frac{Z}{(1 - e^2)D}. \quad (5)$$

Условие (4) и формула (5) означают, что широта B_0 относится к эллипсоиду, который проходит через точку Q с координатами X, Y, Z и имеет тот же эксцентриситет, что и отсчетный эллипсоид (рисунок). В [2] этот эллипсоид назван воздушным.

С найденным значением широты B_0 нахо-



Взаимное расположение воздушного и отсчетного эллипсоидов

дим высоту

$$H = D \cos B_o + Z \sin B_o - a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_o} \quad (6)$$

и затем широту по формуле

$$\operatorname{tg} B = \frac{Z - H e^2 \sin B_o}{(1 - e^2) D}. \quad (7)$$

В [1] для ошибок dB , dH вычисления широты и высоты получены формулы

$$dB = -\frac{1}{2} \frac{\dot{e}^2 dH}{R} \sin 2B; \quad dH = -\frac{1}{2} R (dB)^2, \quad (8)$$

где R — средний радиус Земли; $\dot{e}$ — второй эксцентриситет. Для $R=6371$ км; $\dot{e}^2=0,0067395$; $dB''=-0,0001091 dH \sin 2B$; $dH=-0,0000749 (dB'')^2$; dH в метрах.

Оценим с помощью первой из этих формул разность $B-B_o$. Так как при вычислении B_o высота считается равной нулю, в этом случае под dH нужно понимать полное значение высоты H (см. формулы (3) и (5)). На широте 45° для максимально возможной на Земле высоты в 10 км разность $B-B_o$ составит

$$B-B_o = -1,091 \cdot 10^{-4} \cdot 10^4 = -1,091''.$$

При такой ошибке широты ошибка высоты, вычисленной по формуле (6), будет равна

$$dH = -7,49 \cdot 10^{-5} \cdot (1,091)^2 = 8,915 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,089 \text{ мм},$$

а ошибка широты, вычисленной по формуле (7), $dB = -1,091 \cdot 10^{-4} \cdot 8,915 \cdot 10^{-5} = -9,73'' \cdot 10^{-9}$. Т.е. даже в этом предельном случае ошибки преобразования значительно меньше современной точности измерения высоты и широты. Для средней на Земле высоте топографических масс в 800 м ошибки вычисления по формулам (5)–(7) составят меньше одного микрона для высоты и меньше 10^{-10} угл. секунды для широты. Поэтому эти формулы можно реко-

мендовать для вычисления криволинейных координат точек поверхности Земли. Тогда преобразование прямоугольных координат в криволинейные будет таким же простым, как и обратное.

Для наглядности поместим рядом формулы взаимного преобразования криволинейных и прямоугольных координат (табл. 1).

Сравним предложенный способ с некоторыми другими.

В [1]–[3] уравнение для Z записано в форме

$$Z = (N + H) \left(1 - \frac{N}{N + H} e^2 \right) \sin B. \quad (9)$$

Такая запись означает, что точка Q (см. рис.) лежит на поверхности эллипсоида с эксцентриситетом e_1 , причем $e_1^2 = \frac{N}{N + H} e^2$.

В [1] этот эллипсоид назван внешним. Широта точки Q относительно внешнего эллипсоида равна широте ее проекции P относительно отсчетного эллипсоида, нормаль Qp к поверхности внешнего эллипсоида является нормалью к отсчетному эллипсоиду.

Формула (9) совместно с выражением для радиуса D параллели (см. формулы (1)) позволяет найти для широты B выражение

$$\operatorname{tg} B = \frac{Z}{\left(1 - \frac{N}{N + H} e^2 \right) D}. \quad (10)$$

В отличие от формулы (5) здесь использован не эксцентриситет e отсчетного эллипсоида, а зависящий от высоты эксцентриситет e_1 внешнего эллипсоида. Формула (10) эквивалентна формуле (7) и дает другую запись связи геодезической широты с высотой; при $H=0$ формулы (5), (7) и (10) совпадают. Для вычисления широты по формуле (10), как и в предыдущем способе, высоту следует найти по формулам (5)–(6), а для вычисления радиуса кривизны использовать приближенное значение широты B_o :

$$\operatorname{tg} B = \frac{Z}{\left(1 - \frac{N_o}{N_o + H} e^2 \right) D}, \quad (11)$$

$$\text{где } N_o = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_o}}.$$

Т а б л и ц а 1

Преобразование координат	
B, L, H в X, Y, Z	X, Y, Z в B, L, H
$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e \sin^2 B}}$	$\operatorname{tg} B_o = \frac{Z}{(1 - e^2) D}$
$X = (N + H) \cos B \cos L$	$H = D \cos B_o + Z \sin B_o - a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_o}$
$Y = (N + H) \cos B \sin L$	$\operatorname{tg} B = \frac{Z - H e^2 \sin B_o}{(1 - e^2) D}$
$Z = (N - N e^2 + H) \sin B$	$\operatorname{tg} L = \frac{Y}{X}$
$D = \sqrt{X^2 + Y^2} = (N + H) \cos B$	

В отличие от рассмотренных выше, во всех других способах преобразования криволинейных координат все усилия направлены на вычисление широты. С этой целью для широты используют выражения, не содержащие в явном виде высоту H , например,

$$\operatorname{tg} B = \frac{Z + Ne^2 \sin B}{D} \quad (12)$$

или, как в [4] $\operatorname{tg} B = \frac{Z}{D - Ne^2 \sin B}$.

«Как показывает формула (12), геодезическая широта может быть найдена только методом последовательных приближений» [5].

Попытки получить безитерационный способ решения уравнения (12) только подтверждают это заключение. Так, в «безитерационном» методе Пеневых [6, 7] коэффициенты уравнения четвертой степени относительно $\operatorname{tg} B$, к которому приведено равенство (12), содержат геоцентрическую Φ_o , приведенную U_o и геодезическую B_o широту, а решение сводится к иррациональным выражениям и, следовательно, к бесконечным дробям.

В качестве начального приближения обычно используют какую-либо широту воздушного эллипсоида, например, геоцентрическую Φ_o в [2, 4, 5], приведенную U_o в методе Боуринга, широты Φ_o , U_o , B_o в [6, 7].

В популярном методе Боуринга вычисление широты начинают с преобразования формулы (12). Используя соотношение

$$N \sin B = \frac{a \sin U}{\sqrt{1-e^2}}, \quad (13)$$

переходят от геодезической широты к приведенной широте U , тогда

$$\operatorname{tg} B = \frac{Z + a \frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}} \sin U}{D}.$$

Далее, учитывая известную зависимость геодезической и приведенной широты точки поверхности эллипсоида,

$$\operatorname{tg} U = \sqrt{1-e^2} \operatorname{tg} B, \quad (14)$$

для приведенной широты получают уравнение

$$\operatorname{tg} U = \frac{Z \sqrt{1-e^2} + ae^2 \sin U}{D}, \quad (15)$$

Уравнение (15) проще уравнения (12), поскольку в его правую часть входит только одна функция широты U (а именно $\sin U$), а в уравнении (12) от широты B зависит не только $\sin B$, но и радиус кривизны N , определяемый выражением (2).

Для решения уравнения (15) в начальном приближении вычисляют приведенную широту U_o точки Q воздушного эллипсоида

$$\operatorname{tg} U_o = \sqrt{1-e^2} \operatorname{tg} B_o = \frac{Z}{D \sqrt{1-e^2}},$$

а затем оценивают разность $\operatorname{tg} U - \operatorname{tg} U_o$, используя разложение

$$\begin{aligned} \sin U &= \sin U_o + \left(\frac{d \sin U}{d \operatorname{tg} U} \right)_o (\operatorname{tg} U - \operatorname{tg} U_o) + \dots = \\ &= \sin U_o + \cos^3 U_o (\operatorname{tg} U - \operatorname{tg} U_o) + \dots \end{aligned}$$

Ограничиваясь в этом разложении членом первой степени относительно разности $\operatorname{tg} U - \operatorname{tg} U_o$ и используя (14), (15), получают формулу Боуринга

$$\operatorname{tg} B = \frac{Z + be'^2 \sin^3 U_o}{D - ae^2 \cos^3 U_o}, \quad (16)$$

где b — малая полуось отсчетного эллипсоида; e' — второй эксцентриситет.

Сравним разные методы вычисления широты. Вычисления выполним для широты 45° , где ошибки вычисления максимальны. Результаты вычислений даны в табл. 2, 3.

В табл. 2 приведены вычисленные по формулам (1) исходные для эксперимента значения D и Z для заданных высот H и результаты вычисления геодезической высоты по формулам (5), (6). Использован эллипсоид ПЗ-90. Как видно из сравнения граф 1 и 6, ошибка вычисления высоты для $H=800$ м меньше 1 мм, а для высоты 10 км равна 0,09 мм. Как и следовало ожидать, с увеличением высоты над эллипсоидом ошибка заметно возрастает и для высоты, равной удвоенному значению большой полуоси, составляет 48 м.

В табл. 3 приведены результаты вычисления геодезической широты тремя способами: по формуле (7) (простой способ), по формуле (11) (внешний эллипсоид) и формуле (16) (Боуринга). В графе 3 также даны значения эксцентриситета внешнего эллипсоида. С возрастанием высоты его эксцентриситет и сжатие

Т а б л и ц а 2

Вычисление высоты
Эллипсоид ПЗ-90; $a=6378136$ м; $e^2=0,006694366$; $B=45^\circ$

Исходные данные			Широта на воздушном эллипсоиде, радианы			H , м
H , м	D , м	Z , м	Φ_o	U_o	B_o	по ф-ле (6)
1	2	3	4	5	6	7
0	4517590,155	4487347,753	0,782039752	0,783718948	0,785398163	0
800	4518155,840	4487913,438	0,782040174	0,783719370	0,785398585	799,999999
10000	4524661,223	4494418,821	0,782045018	0,783724214	0,785403430	9999,99991
100000	4588300,833	4558058,431	0,782091679	0,783770876	0,785450092	99999,9913
700000	5012564,902	4982322,500	0,782372385	0,784051587	0,785730804	699999,609
3700000	7133885,245	7103642,843	0,783274034	0,784953246	0,786632463	3699992,33
12756272	13537636,59	13507394,438	0,784279940	0,785959157	0,787638368	12756224

Т а б л и ц а 3

Вычисление широты

Формула (7) «Простой способ»		Формула (11) «Внешний эллипсоид»			Формула (16) Боуринга	
B , радианы	Ошибка B , угл. с	e_1^2	B , радианы	Ошибка B , угл. с	B , радианы	Ошибка B , угл. с
1	2	3	4	5	6	7
0,785398163	0	0,006694366	0,785398163	0	0,785398163	0
0,785398163	−3,67322E−08	0,006693528	0,785398163	1,145E−10	0,785398163	1,83E−10
0,785398163	−5,73749E−08	0,006683904	0,785398163	1,91902E−08	0,785398163	2,88E−08
0,785398161	−0,000556	0,006591199	0,785398163	1,8391E−06	0,785398163	2,76E−06
0,785398053	−0,022826	0,006033319	0,785398164	6,90579E−05	0,785398164	0,000104
0,785396639	−0,314438	0,004239268	0,785398167	0,000667495	0,785398168	0,001001
0,785393139	−1,036311	0,002233961	0,785398169	0,001157528	0,785398172	0,001736

убывают и на высоте 12 756 км сжатие равно $(a-b)/3a=1:895$. При $H \rightarrow \infty$ эксцентриситет равен нулю и внешний эллипсоид превращается в сферу.

Наименьшую точность имеет Простой способ. Однако на небольших высотах над эллипсоидом ошибки этого способа невелики, и даже на высоте 10 км ошибка широты составляет $-5,7'' \cdot 10^{-8}$ или менее 2 мкм в линейной мере. Так как высоты точек поверхности Земли, как правило, гораздо меньше 10 км, а точность измерения координат значительно ниже, точность Простого способа достаточна для вычисления высоты и широты любой точки поверхности Земли. Наибольшую точность имеет формула (11). Ошибка вычисленной по этой формуле широты в полтора раза меньше ошибок формулы Боуринга.

Таким образом, для вычисления широты и высоты точек поверхности Земли целесообразнее всего использовать Простой способ, а на больших высотах — формулы (1), (6) и (11). Заметим, что криволинейные координаты на больших высотах над Землей представляют

абстрактный интерес и редко используются для решения геодезических задач. Эти координаты введены как приближение к измеряемым на Земле астрономическим координатам и используются при решении задач на поверхности отсчетного эллипсоида и изучении поля силы тяжести.

ЛИТЕРАТУРА

1. Огородова Л.В. Совместное вычисление геодезической широты и высоты точек поверхности Земли // Геодезия и картография. —2011. —№ 9. —С. 11–15.
2. Буткевич А.В., Радьо Т.В. О переходе от пространственных прямоугольных координат к геодезическим без приближений // Геодезия и картография. —1982. —№5. —С. 16–17.
3. Огородова Л.В. Высшая геодезия. М.: Геодезкартиздат, 2006. —384 с.
4. Андреев М. Преобразование прямоугольных пространственных координат в геодезические // Геодезия и картография. —1966. —№ 9. —С. 12–14.
5. Изотов А.А. Преобразование пространственных прямоугольных координат в геодезические координаты // Геодезия и картография. —1969. —№ 5. —С. 6–7.
6. Пенев П. Трансформация прямоугольных координат в географические с применением замкнутых формул. // Изв. вузов «Геодезия и аэрофотосъемка». —1980. —№ 3. —С. 30–33.
7. Пенев П., Пенев Е. Преобразование прямоугольных геоцентрических координат в геодезические без применения итерации. // Изв. вузов «Геодезия и аэрофотосъемка». —2012. —№3. —С.34–38.

*Принята к печати 9 января 2014 г.
Рекомендована кафедрой высшей геодезии МИИГАиК*